

자이로스코프 실험 Pre-lab

토크와 각운동량

공과대학 컴퓨터공학부 2020-00000 윤교준

1. 실험 목적

전통 놀이인 팽이 치기를 생각하자. 줄로 팽이의 옆을 강하게 내려침에도 불구하고, 팽이는 옆으로 넘어지지 않으며 회전한다. 이러한 현상은 자이로스코프의 실험을 이용하여 설명할 수 있다. 본 실험에서는 자이로스코프의 세차 운동을 관찰하고, 이러한 회전 운동을 토크와 각운동량을 이용하여 이론적으로 설명한다.

2. 배경 지식

2-1. 토크 및 각운동량

토크는 회전하는 물체에 관한 물리량이다. 힘 \vec{F} 가 \vec{r} 의 작용점에 작용하였다면, 토크는

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

로 정의된다. 회전운동의 토크는 병진운동의 힘과 그 의미가 유사하다. 이를 확장하여, 병진운동의 운동량을 회전운동의 각운동량에 대응시킬 수 있다. 회전하는 물체의 각운동량은

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

로 정의된다.

회전 운동을 하는 물체에 토크 $\vec{\tau}$ 가 작용하면

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = m\vec{r} \times \vec{a} = m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + m \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

이므로, 물체의 각운동량 \vec{L} 은 변화한다.

$$L = \sum_i m_i r_i^2 \omega = I\omega$$

에서 관성 모멘트 I 는, $p = mv$ 에서 질량과 그 의미를 공유함을 알 수 있다.

2-2. 자이로스코프 세차 운동

자이로스코프의 회전축을 x 축의 양의 방향으로 설정한 후, 한 쪽 끝을 고정한 다음, 관성 바퀴가 회전하지 않는 상황을 생각하자. 중력 \vec{F} 은 $-z$ 방향, \vec{r} 은 $+x$ 방향이므로, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ 에서 토크는 $+y$ 방향임을 알 수 있다. 따라서

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

에서, 각운동량 \vec{L} 은 $+y$ 방향으로 증가함을 알 수 있다. 이는 관성 바퀴가 $-z$ 방향으로 더 빠르게 회전할 것이라고 해석할 수 있다.

관성 바퀴가 회전하는 상황을 생각하자. 회전에 의한 초기 각운동량 \vec{L} 와, 토크 $\vec{\tau}$ 에 의한 각운동량 변화 $d\vec{L}$ 는 항상 서로 수직이다. \vec{L} 은 \vec{r} 과 항상 평행하나, $\vec{\tau}$ 는 \vec{r} 과 수직이기 때문이다. \vec{L} 과 $\frac{d\vec{L}}{dt}$ 가 항상 수직하므로, \vec{L} 은 시간이 지남에 따라 xy 평면 위에서 회전하나, 그 크기는 변하지 않는다. 이는 관성 바퀴의 회전축이 xy 평면 상에서 일정한 방향과 속력을 가지고 회전한다고 해석할 수 있다. 이렇듯 관성 바퀴가 떨어지지 않고 계속 회전하는 운동을 세차 운동이라고 한다.

세차 운동을 하는 자이로스코프의 세차 각도를 ϕ_p , 세차 각속도를 ω_p 라 하면

$$\omega_p = \frac{d\phi_p}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\|d\vec{L}\|}{\|\vec{L}\|} \right) = \frac{1}{\|\vec{L}\|} \left\| \frac{d\vec{L}}{dt} \right\| = \frac{\|\vec{\tau}\|}{I\omega} = \frac{mgr}{I\omega}$$

임을 알 수 있다.

2-3. 자이로스코프 장동 운동

자이로스코프에서 세차 운동이 일어나면, 세차

운동 자체의 회전으로 인하여, 각운동량의 z 축 성분 또한 변화하게 된다. 결과적으로 복합적인 연관 관계에 의하여, 관성 바퀴는 xy 평면 상의 세차 운동과 더불어 z 축 방향에서 상하로 진동하는 장동 운동을 동시에 하게 된다.

3. 실험 방법

3-1. 실험 장치 세팅 및 물리량 측정

균형추, 무게 추의 질량을 측정한다. 관성 바퀴의 반지름, 관성 바퀴 중심과 균형추 중심, 거치대 중심과의 거리 등을 측정한다.

자이로스코프 실험 장치를 컴퓨터와 연결하여, SensorLAB에서 장치를 올바르게 인식할 수 있는지 확인한다.

수평계 등을 이용하여 자이로스코프 실험 장치의 수평을 확인한다. 수평 조절 볼트를 이용하여 수평을 조절할 수 있다.

관성 바퀴의 초기 토크를 없애기 위하여, 균형추를 통하여 회전축의 좌우 무게균형을 맞춘다.

3-2. 실험 ① 세차 운동 관찰

실험 ①에서는 자이로스코프의 세차 운동을 관찰한다. 거치대에 무게 추를 설치하고, 관성 바퀴를 회전시켜 세차 운동을 관찰한다. 회전 속도를 충분히 빠르게 하고 회전축을 손으로 가볍게 밀어, 장동 운동이 관찰되지 않도록 한다.

위와 같은 과정을 여러 개의 무게 추에 대하여 여러 번 반복하며, 운동의 관찰 데이터를 수집한다.

3-3. 실험 ② 장동 운동 관찰

실험 ②에서는 자이로스코프 실험 장치에 세가지 초기 조건을 주었을 때, 각각의 장동 운동을 관찰한다.

첫 번째로 회전축을 정지시킨 후 가볍게 놓아 장동 운동을 관찰한다. 두 번째로 세차 운동과 반대 방향으로 회전축을 밀어준 후의 장동 운동을 관찰한다. 마지막으로, 세차 운동과 같은 방향으로 회전축을 밀어주어 장동 운동을 관찰한다.

각 초기 조건에 대해 장동 운동의 양상을 분석하고, 서로 비교한다.

3-4. 오차 분석 추가실험

자이로스코프의 세차 운동과 장동 운동은 서로에게 영향을 주며 복합적인 연관 관계를 보여준다. 이론적 배경에서는 세차 운동이 장동 운동에만 영향을 준다고 생각하였지만, 실제로는 장동 운동이 다시 세차 운동에 영향을 주기 때문에, 실험 측정값은 이론값과 차이를 보일 것이다.

세차 운동과 장동 운동 간의 관계를 이계 연립미분방정식으로 설명할 수 있다. 물체에 일정한 힘을 작용시키는 장비를 이용하여, 실험 ②의 과정을 더 엄밀하고 정량적으로 진행한다. 이후, 관성 바퀴의 삼차원적 운동과 미분방정식의 해를 비교하여, 이전 실험에 비하여 그 오차가 줄어들었는지를 확인한다.

4. 실험 장비

3절에 서술한 세 종류의 실험을 진행하기 위해서는 다음과 같은 장비가 필요하다. 자이로스코프 실험 장치와 컴퓨터, 여러 개의 무게 추, 전자 저울, 1m 자 및 버니어 캘리퍼스가 필요하다.

물리량 측정을 위하여 실험 장치에서 원판을 무리하게 분리하면 안된다. 원판과 실험 장치 사이에 여러 센서가 존재하기 때문에, 원판 분리시에는 이러한 민감성에 유의한다.

관성 바퀴를 회전시키기 위하여 줄을 당길 때, 너무 빠르게 당길 경우 원판이 분리되면서 장비가 파손될 수 있다.

실험 장치의 수평과 초기 토크를 정밀하게 맞추지 않을 경우, 실험 도중 관성 바퀴가 회전하면서 실험 장치의 축에 무리를 줄 수 있다. 이는 곧 실험 장치의 파손과 연관되므로 유의한다.

실험 과정에서 회전축에 손이 끼이지 않도록 안전에 주의한다.