시지프스의 고민 Pre-lab

에너지 보존 법칙

공과대학 컴퓨터공학부 2020-OOOOO 윤교준

1. 실험 목적

실에 매달려 좌우로 진동하는 시계추와 가속도중 원형 궤도에 진입하는 롤러코스터는 서로 완전하게 다른 운동을 하는 것처럼 보인다. 그러나 이들을 에너지 측면에서 바라본다면, 운동 에너지와 위치 에너지 간의 변화가 일어난다는 공통점이 있다. 이렇듯 에너지는 소멸하지 않고 그 형태만 바꾼다는 법칙을 에너지 보존 법칙이라고 하며, 롤러코스터와 비슷한 궤도 위의 공의 운동을 관찰함으로써 이를 실험적으로 검증하고자 한다.

2. 배경 지식

2-1. 에너지 보존 법칙

에너지 보존 법칙은, 고립계 내부의 에너지의 총합은 항상 일정하며, 에너지는 형태를 바꾸거나 다른 계로 전달될 수 있지만 자체적으로 소멸되지는 않는다는 물리학 법칙이다. 열역학에서 이 법칙은 열역학 제1법칙으로 불리며, 단열과정에 있어 계 간의 에너지 이동은 계가 한 일과 계에 한 일의 합임을 설명한다.

에너지 보존 법칙의 따름정리로, 역학적 에너지 보존 법칙이 있다. 마찰이나 저항, 운동으로 인한 열 및 소리 발생 등이 없는 이상적인 가정 아래, 운동하는 물체의 역학적 에너지는 보존된다는 법칙이다. 여기서 역학적 에너지는 위치 에너지와 운동 에너지의 합이다. 에너지의 형태 변화는 위치 에너지와 운동 에너지 간의 변화밖에 없기 때문에, 이 법칙은 에너지 보존 법칙에 의하여 성립한다.

한편, 에너지 보존 법칙은 열역학 제2법칙과 함께 쓰여, 무한동력 영구기관이 존재할 수 없음을 보여준다. 외부의 어떠한 공급을 받지 않고 에너지를 생산하는 영구기관은 에너지 보존 법칙에 위배된다. 또한, 열역학 제2법칙에 의하면 엔트로피는 감소할 수 없기 때문에, 열 에너지는 역학적 에너지로 자발적으로 변화하지 않는다. 따라서, 물을 얼음과 수증기로 변환하는 영구기관 또한 존재할 수 없다.

2-2. 미끄러짐 없는 구름 운동

미끄러짐 없는 구름 운동이란, 물체가 미끄러짐이 없이, 병진 운동과 동시에 회전 운동을 하는 것을 의미한다.

밀도가 균일한, 반지름 r, 질량 m인 구체가 미끄러짐 없이 구름 운동을 한다고 가정하자. 구체의 위치 에너지는

$$U = mgh$$

, 운동 에너지는

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

다. 미끄러짐이 없으므로 $v = r\omega$고, 구체의 관성 모멘트는 $I = \frac{2}{5}mr^2$이므로, 역학적 에너지는

$$E = U + K = mgh + \frac{7}{10}mv^2$$

다.

동일한 구체가 폭이 일정한 궤도 위에서 동일한 운동을 한다고 가정하자. 궤도에 구체가 닿는 두 지점 사이의 거리를 d라고 한다면, 이 구

체는 유효 반지름 $r_{\mathrm{eff}} = \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{4}}$을 가진다. 위와 다르게, $r_{\mathrm{eff}} < r$이고 $v = r_{\mathrm{eff}}\omega$이므로, 구체의 역학적 에너지를 다시 계산하면

$$E = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v}{r_{\mathrm{eff}}}\right)^2$$

$$= mgh + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\left(\frac{r}{r_{\mathrm{eff}}}\right)^2\right)mv^2$$

가 된다.

2-3. 실험 장치에서 구슬의 운동

2-2절의 내용을 확장하여, θ의 기울기를 가지는 비탈 궤도 위의 구체의 운동을 생각해보자. $c_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\left(\frac{r}{r_{\mathrm{eff}}}\right)^2$ 로 치환하면, 구체는 항상 $mgh + c_{\mathrm{eff}}mv^2$의 값을 일정하게 유지한다. 정지된 구체가 비탈 궤도를 따라 수직 방향으로 Δh 만큼 이동하였다면, 역학적 에너지 보존 법칙에 의하여

$$v = \sqrt{\frac{g\Delta h}{c_{\mathrm{eff}}}}$$

다. 이동 거리에 관한 식에 의하여

$$\int_0^{t(\Delta h)} v\,dt = \frac{\Delta h}{\sin\theta}$$

이므로, 이를 미분하여

$$v\sin\theta\,dt = d(\Delta h)$$

를 얻는다. 위에서 구한 v와 Δh 간의 관계식을 대입하면,

$$\frac{d(\Delta h)}{\sqrt{\Delta h}} = \sqrt{\frac{g}{c_{\mathrm{eff}}}}\sin\theta\,dt$$

를 얻고, 이를 적분하여

$$2\sqrt{\Delta h} = \left(\sqrt{\frac{g}{c_{\mathrm{eff}}}}\sin\theta\right)t$$

임을 알 수 있다. 결과적으로

$$\Delta h = \frac{g(\sin\theta)^2}{4c_{\mathrm{eff}}}t^2$$

라는 t와 Δh간의 관계를 얻어낼 수 있다.

비탈 궤도를 따라 가속한 구체가 원형 궤도에 진입하는 상황을 생각하자. 반지름 r_{cir}의 원형 궤도의 최고점까지 구체가 도달하기 위하여, 구체는 최고점에서 중력 이상의 구심력을 가져야 한다. 고로, 최고점까지 구체가 도달하기 위하여 필요한 최소 수직 방향 이동 거리를 Δh_{min}라 하면, 최고점에서 구심력과 중력이 같으므로

$$\frac{mv^2}{r_{\mathrm{cir}}} = mg$$

다. 역학적 에너지 보존 법칙에 의하여

$$mg\Delta h = mg(2r_{\mathrm{cir}}) + c_{\mathrm{eff}}mv^2$$

이므로, 이를 Δh_{min}에 대하여 정리하면

$$\Delta h_{\mathrm{min}} = (2 + c_{\mathrm{eff}})r_{\mathrm{cir}} = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{5}\left(\frac{r}{r_{\mathrm{eff}}}\right)^2\right)r_{\mathrm{cir}}$$

임을 알 수 있다.

3. 실험 방법

일정한 기울기를 가지는 직선 궤도와, 적당한 반지름의 원형 궤도를 이어, 구슬의 이동 궤도를 제작한다. ①직선 궤도에서 구슬의 운동을 관찰하는 실험과 ②두 궤도를 모두 이용하여 Δh_{min}를 계산하는 실험을 진행한다.

3-1. 물리량 측정

버니어 캘리퍼스와 전자 저울을 이용하여 구슬의 반지름과 질량을 측정한다. 직선 궤도의 기울기와 원형 궤도의 반지름, 궤도의 폭을 측정한다.

이러한 측정 과정을 여러 번 반복하여, 평균값을 사용함으로써 측정에 의한 오차를 줄인다.

3-2. 실험 ① 역학적 에너지 보존 실험

직선 궤도의 두 지점 Z_1, Z_2를 설정하고, 두 지점 사이의 거리를 자로 측정한다. Z_1은 구슬의 운동이 시작되는 지점, Z_2는 운동 종료 지점을 의미한다.

궤도를 수직하게 찍도록 카메라의 위치를 설정하고, 구슬을 Z_1에 정지된 상태로 놓아 Z_2까지

굴러 내려가는 모습을 기준자와 함께 카메라로 녹화한다. 녹화 영상을 I-CA 프로그램을 이용하여, 구슬의 운동을 분석한다. 시간에 따른 추의 y좌표를 분석하고, 이 데이터를 바탕으로 Z_1과 Z_2에서의 역학적 에너지, 시간에 따른 운동 에너지와 위치 에너지를 계산한다. 궤도를 따라 구르는 추가 역학적 에너지 보존 법칙을 따르는지 확인한다.

동일한 Z_1, Z_2 지점에 대하여 위의 과정을 여러 번 반복한다. 또한, 지점 Z_1, Z_2의 위치를 다양하게 설정하여 본 과정을 여러 번 반복한다.

3-3. 추가실험 ① 역학적 에너지 보존 실험

3-2절의 실험 ① 과정을 다양한 질량의 구슬에 대하여 동일하게 수행한다. 역학적 에너지 보존 법칙은 구슬의 질량에 관계없이 성립함을 확인한다.

구슬 테두리 한 곳에 조그마한 표식을 하여, 실험 ① 과정을 수행하되, 구슬의 회전각과 각가속도를 같이 분석한다. 각가속도의 변화를 통하여, 궤도로 인한 마찰력의 영향을 알아본다.

3-4. 실험 ② $\Delta h_{\min}$ 측정

직선 궤도와 원형 궤도를 연결한다. 직선 궤도 위의 다양한 지점에서 정지 상태의 구슬을 놓아, 구슬이 원형 궤도의 최고점을 도달하는지 여부를 확인한다. 원형 궤도의 최고점을 도달할 수 있는 가장 낮은 지점 Z_0를 찾고, 지점 Z_0과 원형 궤도 시작 지점 간의 거리를 자로 측정한다.

이론적인 최소 높이 $\Delta h_{\min}$과 실험으로부터 얻은 값을 비교함으로써 마찰력의 효과를 확인한다.

4. 실험 장비

3절에 서술한 두 종류의 실험을 진행하기 위해서는 다음과 같은 장비가 필요하다. 카메라 및 I-CA 프로그램이 설치된 컴퓨터 1대, 다양한 질량의 플라스틱 구슬, 1m 플라스틱 자 한 개, 직선 궤도와 원형 궤도, 스탠드, 버니어 캘리퍼스, 전자 저울이 필요하다.

구슬의 운동이 너무 빠르게 진행되어, 구슬이 궤도를 이탈함으로써 발생할 수 있는 안전 문제에 유의한다. 바닥에 떨어진 구슬이 밟힘으로써 넘어질 수 있음을 항시 주의한다. 또한 구슬이 원형 궤도를 이탈하여 사람에게 날아갈 수 있음에 유의한다.

사용하는 궤도는 폭이 일정하고 고운 표면의 마찰력이 적은 것으로 사용한다. 구슬은 표면 흠집이 없는 구 형태의 것을 사용한다.