

관성 모멘트 측정 실험 Pre-lab

관성 모멘트와 회전 운동, 그리고 토크

공과대학 컴퓨터공학부 2020-00000 윤교준

1. 실험 목적

제자리에서 빠르게 회전하는 팽이를 관찰하자. 이 팽이는 빠른 회전 운동을 하고 있음에도 불구하고, 질량 중심이 움직이고 있지 않기 때문에, 팽이의 운동 에너지는 0이다. 이와 같은 모순을 해결하고, 회전 운동을 좀 더 명확하게 설명하기 위하여 '관성 모멘트'와 '토크'라는 개념이 등장하였다.

본 실험을 통하여 회전 운동과 관성 모멘트, 토크 간의 연관관계를 알아보고, 평행축 정리 등 이와 관련된 이론을 확인하고자 한다.

2. 배경 지식

2-1. 관성 모멘트

뉴턴 법칙 $F = ma$ 에서 m 을 “직선으로 운동하는 물체가 자신의 운동을 계속 유지하려는 정도”로 해석한다면, 관성 모멘트는 회전 운동에서의 m 과 같은 개념이라고 이해할 수 있다.

하나의 고정된 축에 대하여 회전하는 강체를 생각할 때, 그 물체의 입자의 총 운동 에너지 K 는 $K = \int \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} \int (\omega r)^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 \rho dV$ 과 같이 식으로써 쓸 수 있다. 여기서 적분 안의 식 $\int r^2 \rho dV$ 을 관성 모멘트 I 라고 하며, 회전 운동 에너지 $K = \frac{1}{2} \omega^2 I$ 를 운동 에너지 식 $K = \frac{1}{2} v^2 m$ 과 유사한 형태로 적을 수 있게 한다. 질량 m 과 관성 모멘트 I 가 식에서 서로 대응됨을 확인할 수 있다.

2-2. 평행축 정리

질량이 M 인 강체의 질량 중심을 지나는 회전축 l_0 에 대하여 그 관성 모멘트가 I_0 라 하자. 축 l_0 와 평행하고, 이와 거리가 δ 인 임의의 축 l 에 대하여, 회전축 l 에 대한 강체의 회전 모멘트가 $I = I_0 + M\delta^2$ 라는 것이 평행축 정리이다.

이 정리는 관성 모멘트 정의의 적분 식을 조작함으로써 증명할 수 있다. 축 l_0 를 z 축으로 하는 3차원 좌표계를 생각하자. 강체의 질량 중심을 원점 O 라 한다면, $I_0 = \int (x^2 + y^2) dm$ 다. 축 l 이 점 $(x_l, y_l, 0)$ 을 지난다면, $I = \int ((x - x_l)^2 + (y - y_l)^2) dm = \int (x^2 + y^2) dm - 2x_l \int x dm - 2y_l \int y dm + \int (x_l^2 + y_l^2) dm$ 다. 여기서 원점이 질량 중심이므로, $\int x dm = \int y dm = 0$ 다. 따라서, $I = I_0 + M\delta^2$ 가 성립한다.

이 정리는, 임의의 축에 대하여 강체의 관성 모멘트를 알기 위해서는, 질량 중심을 지나서 평행한 축에 대한 관성 모멘트만 알아도 충분하다는 것을 암시한다. 또한, 평행한 축이라면, 질량 중심으로부터 멀어질수록 관성 모멘트는 거리의 제곱에 비례하게 커짐을 의미한다.

2-3. 토크

토크는 회전 중심에 대하여 물체를 얼마나 회전시켰는지에 관한 물리량이다. 점 O 에 대하여 \vec{r} 에 위치한 입자에 힘 \vec{F} 를 가한다면, 고정점 O 에 대한 입자의 토크 $\vec{\tau}$ 는 $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ 로 정의한다. 토크의 단위는 $N \cdot m$ 으로 일의 단위와 같지만, J 은 사용하지 않는다.

3. 실험 방법

다양한 모양의 강체 시료를 다양한 위치에 두었을 때의 관성 모멘트를 측정하여 보면서, 실험의 측정값이 이론과 일치하는지 확인할 것이다.

3-1. 시료 물리량 측정

시료는 정사각형, 원형, 원환형 등 다양한 모양을 가지고 있다. 버니어 캘리퍼스를 이용하여 변의 길이나 직경, 내경, 두께 등을 꼼꼼하게 측정한다. 또한 시료의 총질량이 얼마인지 전자저울을 이용하여 측정한다. 이러한 측정 과정을 세 번 반복하여 측정 오차를 줄인다.

3-2. 관성 모멘트 측정

본 세부절에서는 고정된 축에 대하여 특정 시료의 관성 모멘트를 측정하는 방법에 대하여 다룬다.

카메라와 컴퓨터를 서로 연결하여, 문제없이 연결되는지 확인한다. 또한 I-CA 프로그램에서 카메라를 정상적으로 인식할 수 있는지 확인한다.

관성 모멘트 측정 실험장치를 설치한다. 이 장치는 수평인 상태에서 단단하게 고정하여 사용해야 하기 때문에, 실험 테이블 위에 놓아 클램프로 고정하여 사용하도록 한다.

실험장치에 추를 매단 긴 실을 연결한다. 실이 고정 도르레 위에 얹어지고, 실험장치 회전축에 수평으로 감길 수 있도록 한다. 실을 적당량 감았다면, 고정 도르레의 높이를 조절하여 실이 실험 테이블과 평행을 이루도록 한다.

카메라를 세팅하여, 회전판의 회전 운동을 녹화할 수 있도록 한다. 카메라 렌즈 면이 회전면

과 평행하고, 회전판 중심이 카메라 화면의 정중앙에 들어오도록, 카메라의 위치를 잡는다. 이후 스텐드로 카메라를 견고하게 고정한다.

회전판의 회전 운동은 영상으로 촬영하여 다음과 같이 분석할 수 있다. 먼저, '카메라분석 - 분석'에서 영상의 시작과 끝 프레임을 지정한다. 회전판 중앙과 테두리에 붙여진 스티커를 피사체로 지정하고, 기준 거리는 둘 사이의 거리로써 실제로 자로 측정하여 그 값을 사용한다. I-CA 프로그램으로 움직이는 테두리 스티커의 x , y 좌표를 얻었다면, 이를 $r-\theta$ 좌표계로 변환하여, 회전 시간에 따른 회전각 $\theta(t)$ 을 구한다.

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{mgr}{2(I+mr^2)} t^2$$
이므로, $t-\theta$ 그래프의 이차 추세선의 식의 이차항의 계수 A 를 이용하여, 관성 모멘트 $I = \frac{mgr}{2A} - mr^2$ 를 계산할 수 있다.

관성 모멘트를 측정할 때, 위와 같은 과정을 세 번 반복함으로써, 실험 데이터의 오차를 줄이도록 한다.

3-3. 시료의 관성 모멘트 측정

먼저 실험장치에 어떠한 시료도 올려두지 않은 상태에서, 실험장치의 회전판의 관성 모멘트 I_0 를 측정한다. 이후 시료의 관성 모멘트를 측정할 때에는, 측정값에서 I_0 를 뺀으로써 계산할 수 있다.

다양한 시료를 다양한 위치에 설치해보면서, 각각의 관성 모멘트를 측정한다. 이후, 이론적인 값과 측정 값을 비교한다. 이론적인 관성 모멘트 값은 관성 모멘트의 적분 식 정의와 평행축 정리 등을 적용하여 계산할 수 있다.

4. 실험 장비

3절에 서술한 실험을 진행하기 위하여 다음 물

품이 필요하다. 카메라와 I-CA 프로그램, 50g 추 한 개, 실, 전자 저울과 자, 버니어 캘리퍼스, 다양한 모양의 시료, 관성 모멘트 측정 실험장치가 필요하다.

전자 저울과 버니어 캘리퍼스, 자는 시료의 물리량을 정밀하게 측정할 때 사용된다. 실험에 사용되는 물건들이 무겁기 때문에, 측정하면서 손 등을 다치지 않도록 안전에 유의하여야 한다.

이외의 모든 준비물은 시료의 관성 모멘트를 측정할 때에 사용된다. 떨어지는 추에 의하여 다치거나 물건이 파손되는 것에 유의하여야 한다. 또한 회전하는 판이나 시료에 손이나 머리카락 등이 끼이지 않도록 주의하여야 한다. 실험에 사용되는 모든 장비는 완전하게 고정되어야 하며, 회전판 위의 시료는 되도록이면 무게 중심이 정가운데에 오도록 하여야 한다. 회전판이 너무 빠르게 회전한다면, 추를 더 가벼운 것으로 교체한다.