

물리학실험 1 (000)

이00 조교님

관성 모멘트 측정 실험

공과대학 컴퓨터공학부

2020-00000

윤교준

2020년 4월 17일

관성 모멘트 측정 실험

회전 운동과 관성 모멘트 및 토크

Abstract

본 실험에서는 고정된 회전축을 기준으로 회전 운동을 하는 강체의 관성 모멘트를 측정한다. 다양한 모양의 시료와 시료들의 배치 방법에 대하여, 관성 모멘트 값을 이론적인 수식을 이용하여 예상하고, 이를 관성 모멘트 측정 장치를 이용하여 직접 측정함으로써 확인하였다. 이론과 다르게 실험에서는 관성 모멘트 값이 이론 값보다 크게 계산되는 오차가 발생하였다. 이러한 오차의 원인으로 '시료의 물리량 측정에서 발생한 부정확성', '실의 꼬임과 낙하하는 추의 진동' 등을 제시하였다.

1. 서론

1-1. 실험 목적

본 실험에서는 자유 낙하하는 추와 회전 장치를 이용하여, 다양한 모양의 시료가 가지는 관성 모멘트를 측정한다. 실험을 통하여 측정값과 이론적 값을 비교함으로써, 회전 운동과 관성 모멘트, 토크 간의 연관 관계를 알아보고, 평행축 정리와 회전에 관한 뉴턴 제2법칙 등 이에 대한 여러 이론을 확인하고자 한다.

1-2. 이론적 배경

1-2-1. 관성 모멘트

고정된 축 l 을 기준으로 각속도 ω 의 회전 운동을 하는 강체의 총 운동 에너지는

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \int r^2 dm = \frac{\omega^2}{2} \int r^2 \rho dV$$

다. 마지막 항의 적분식 $\int r^2 \rho dV$ 을 강체의 관성 모멘트 I 로 정의한다. 직선 운동 에너지 $K = \frac{1}{2} m v^2$ 과 회전 운동 에너지 $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ 은 비슷한 식 형태를 가지며, '직선 운동을 하는 강체의 관성에 관한 항'을 질량 m 으로 생각한다면, 관성 모멘트 I 는 '회전 운동에서 강체의 관성'으로 해석할 수 있다.

균일한 밀도 ρ 를 가지는 질량 m 의 강체를 중

심축에 대하여 회전시킬 때의 관성 모멘트 I 는, 그 물체의 모양에 따라서 서로 다른 값을 가진다. 가로 a , 세로 b 인 직육면체의 관성 모멘트는

$$I_{\text{cuboid}} = \int_0^h \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) \rho dy dx dz = \frac{abh\rho(a^2 + b^2)}{12} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

, 반지름 r 인 원기둥의 관성 모멘트는

$$I_{\text{cylinder}} = \int_0^h \int_0^r \int_0^{2\pi} \gamma^2 \rho (\gamma d\theta d\gamma) dz = \frac{\pi r^4 h \rho}{2} = (\pi r^2 h \rho) \frac{r^2}{2} = \frac{m}{2} r^2$$

, 겉반지름 r_{out} , 속반지름 r_{in} 인 두께 있는 원통의 관성 모멘트는

$$I_{\text{tube}} = \int_0^h \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \int_0^{2\pi} \gamma^2 \rho (\gamma d\theta d\gamma) dz = \frac{\pi h \rho (r_{\text{out}}^4 - r_{\text{in}}^4)}{2} = (\pi (r_{\text{out}}^2 - r_{\text{in}}^2) h \rho) \frac{r_{\text{in}}^2 + r_{\text{out}}^2}{2} = \frac{m}{2} (r_{\text{in}}^2 + r_{\text{out}}^2)$$

임을 유도할 수 있다.

1-2-2. 평행축 정리

질량 m 의 강체가 축 l_0 을 기준으로 회전할 때의 관성 모멘트가 I_0 고, 축 l_0 가 강체의 질량심을 지난다면, l_0 와 평행한 모든 축에 대한 관성 모멘트를 추가적인 적분 계산 없이 계산할

수 있다. I_0 와 평행하고 δ 만큼 떨어진 회전축 l 에 대한 관성 모멘트는

$$I_l = \iiint ((x - x_l)^2 + (y - y_l)^2) \rho \, dx \, dy \, dz$$

$$= \left(\iiint (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz \right) - 2x_l \left(\int x \, dm \right) - 2y_l \left(\int y \, dm \right) + (x_l^2 + y_l^2) \int dm$$

$$= I_0 + m\delta^2$$

이다. 축이 질량 중심에서 멀어질수록 관성 모멘트가 증가함을 확인할 수 있다.

1-2-3. 토크

토크 $\vec{\tau}$ 는 힘 \vec{F} 로 물체를 회전시키는 작용에 관한 모멘트다. 고정점 O 에 대하여, 위치 \vec{r} 의 입자에 힘 \vec{F} 을 가할 때의 토크는 $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ 로 정의되고, 거리 r 의 위치에서 수직 방향으로 $F \sin \theta$ 의 힘을 받으며 회전하였다고 해석할 수 있다.

회전에 관한 뉴턴 제2법칙에 의하면, 강체에 토크 τ_{net} 을 가할 때, 회전축에 대한 강체의 관성 모멘트가 I , 각가속도가 α 라면, $\tau_{net} = I\alpha$ 가 성립한다. 이는 뉴턴 제2법칙, $F = ma$ 에서 $a = \alpha r$ 을 대입하여 증명할 수 있다. [1]

1-2-4. 실험 장치의 측정 원리

그림 1은 본 실험에서 사용할 관성 모멘트 측정 장치를 모식화한 것이다. m , g , R 의 값을 알고 있을 때, 낙하하는 추의 가속도 a 의 값을 통하여 회전 장치의 관성 모멘트 I_0 를 측정하는 것이 목적이다.

추에 대하여 뉴턴 제2법칙을 적용하면,

$$ma = mg - T$$

임을 안다. 또한, 각가속도의 정의에 의하여

$$a = \alpha R$$

가 성립한다. 회전 장치에 가해지는 토크 τ 를

회전에 관한 뉴턴 제2법칙으로 풀어 쓰면

$$\tau = RT = I_0 \alpha$$

이다. 따라서 관성 모멘트는

$$I_0 = \frac{RT}{\alpha} = mR^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right)$$

임을 알 수 있다. 고로, 등가속도 낙하 운동을 하는 추의 가속도 a 를 측정하여 회전 장치의 관성 모멘트 I_0 를 계산할 수 있다.

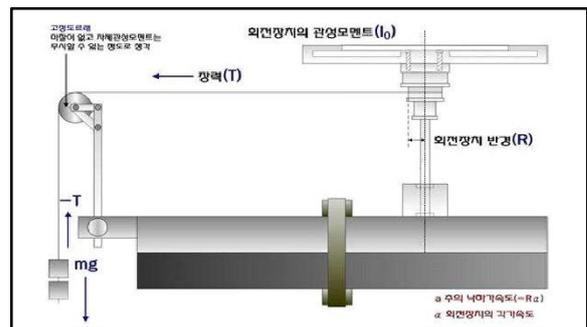


그림 1: 관성 모멘트 측정 장치의 모식도 [2]

2. 본론

2-1. 실험 방법

원기둥, 직육면체, 원판, 직사각판, 고리 모양의 시료와 낙하용 추의 물리량을 측정한다. 전자 저울을 이용하여 질량을 측정하고, 시료의 변의 길이와 두께, 직경과 내경을 버니어 캘리퍼스로 측정한다.

수평한 실험 테이블 위에 관성 모멘트 측정 실험 장치를 설치하고, 클램프로 강하게 고정한다. 긴 실의 한쪽 끝에 낙하용 추를 매단 후, 반대쪽 끝을 장치의 회전축에 수평으로 감는다. 고정 도르레 위에 실을 얹고, 높이를 조정하여 실이 지면과 평행하도록 한다.

추의 낙하 운동을 기록하기 위하여 카메라를 설치한다. 스탠드를 이용하여 카메라를 고정하고, 추가 지면으로 낙하하는 과정을 모두 영상으로 담을 수 있도록 위치를 잡는다.

장치에 시료를 고정하고, 추를 놓아, 낙하하는

추의 가속도를 구한다. 이는 촬영한 영상을 I-CA 프로그램으로 분석하여 구할 수 있다. 얻은 가속도 값을 이용하여 관성 모멘트를 계산하고, 이론적 값과 비교한다.

시료는 다음과 같이 총 여섯 가지 방법으로 설치하고, 각 방법을 세 번씩 반복하여 관성 모멘트를 측정한다.

- (i) 두 원통형 추를 중심에서 4cm 떨어진 곳에 설치
- (ii) 두 원통형 추를 중심에서 7cm 떨어진 곳에 설치
- (iii) 두 직육면체 추를 중심에서 7cm 떨어진 곳에 설치
- (iv) 원판형 추를 중심에 설치
- (v) 직사각판 추를 중심에 설치
- (vi) 고리형 추를 중심에 설치

2-2. 실험 결과 및 데이터

본 보고서의 모든 실험은 조교님이 진행하였고, 데이터 또한 모두 조교님의 측정 결과임을 밝힌다.

2-2-1. 실험 장비의 물리량

$e = 1g$ 의 전자저울로 낙하용 추의 질량을 두 번 측정하였고, 측정 결과는 표 1과 같다. 회전 장치의 반지름은 $R = 3cm$ 다. 시료의 측정값은 표 2와 같다.

표 1: 낙하용 추의 질량 측정 결과 ($e = 1g$)

	질량
1차 측정	40.0g
2차 측정	39.9g
평균	$m_{weight} = 39.95g$

표 2: 시료의 길이 및 질량 측정 결과 ($e_{mass} = 1g$)

추의 모양	길이 1 (cm)	길이 2 (cm)	질량 (g)
원통형	1.5	—	233.7
직육면체	2	6	233.4
원판형	9	—	610.9
직사각판	9	17.8	640.5

고리형	8	9	609.7
-----	---	---	-------

2-2-2. 실험 장치의 관성 모멘트

회전 장치에 아무것도 설치하지 않았을 때, 회전 장치 자체의 관성 모멘트 I_0 를 계산하였고, $I_0 = 3.34325 \times 10^{-3} N \cdot m$ 을 얻었다. 세 번의 실험에서 측정한 추의 가속도와 관성 모멘트는 표 3과 같다.

표 3: 아무것도 설치하지 않았을 때 가속도와 관성 모멘트

	가속도 (m/s^2)	관성 모멘트 ($10^{-3} N \cdot m$)
1차 측정	0.1018	3.42768
2차 측정	0.1020	3.42089
3차 측정	0.1096	3.18118
평균	0.1045	3.34325

2-2-3. 다양한 시료의 관성 모멘트

2-1절의 여섯 가지 방법으로 시료를 설치하여, 추의 가속도와 시료 자체의 관성 모멘트를 측정하였다. 이때 시료의 관성 모멘트는 실험 장치 전체의 관성 모멘트에서 I_0 를 뺀으로써 계산하였다. 표 4는 모든 측정값을 정리한 것이다.

표 4: 각 방법에 대한 가속도와 관성 모멘트

		가속도 (m/s^2)	관성 모멘트 ($10^{-3} N \cdot m$)
i	1차	0.0868	0.68298
	2차	0.0792	1.07279
	3차	0.0846	0.78862
ii	1차	0.0598	2.51708
	2차	0.0624	2.27141
	3차	0.0610	2.40109
iii	1차	0.0598	2.51708
	2차	0.0608	2.42011
	3차	0.0518	3.42771
iv	1차	0.0646	2.07897

	2차	0.0540	3.15039
v	1차	0.0628	2.23541
	2차	0.0634	2.18228
	3차	0.0626	2.25335
vi	1차	0.0448	4.49129
	2차	0.0482	3.93611
	3차	0.0452	4.42164

각 방법에 대하여, 관성 모멘트의 실험적 측정값의 평균과 실제로 구해져야 하는 이론 값은 표 5와 같다.

표 5: 관성 모멘트의 측정 값과 이론 값 및 오차율

(단위: $10^{-3}N\cdot m$)

	I_{avg}	$I_{theoretic}$	오차율 (%)
i	0.84813	0.80042	5.96
ii	2.39653	2.34284	2.29
iii	2.78830	2.44292	14.14
iv	2.61468	2.47415	5.68
v	2.22352	2.12347	4.71
vi	4.28301	4.42033	3.11

일반적으로 실험 값과 이론 값은 5% 정도의 정확도를 가졌다. 방법 (vi)을 제외하고 모두 실험 값이 이론 값보다 약간 더 크다는 것을 관찰할 수 있다. 방법 (iii)의 오차율은 약 14%로 상대적으로 큰 값을 가지나, (iii)의 3차 실험 결과를 제외한다면, 오차율이 1.05%로 줄어든다. 이렇듯 오차로 인하여 발생한 결과의 원인에 대해서는 3절에서 다룬다.

2-3. 오차 분석

본 절에서는 실험에서 얻은 측정 값에서 발생한 오차에 대하여 다룬다. 오차 발생 원인을 분석하고, 이러한 오차를 줄이는 방법 및 개선 방안에 대하여 논의한다.

2-3-1. 측정된 물리량의 오차

전자 저울을 이용하여 질량을 측정하고, 버니어 캘리퍼스를 이용하여 길이를 측정하는 과정에서, 사람에 의한 오차나 측정 장비의 한계에 의한 오차가 발생할 수 있다. 본 실험의 계산에 사용된 중력 가속도 g 또한 장소에 따라 그 값이 달라진다. 이러한 오차들이 계산 과정에서 누적될 경우, 큰 오차로 증폭되어 결과 값에 반영될 수 있다. [3]

예를 들어, 방법 (i)의 이론적 관성 모멘트를 $8.004225 \times 10^{-4}N\cdot m$ 로 계산하였다. 그러나, 만일 길이의 오차가 $\pm 0.1cm$, 질량의 오차가 $\pm 1g$ 만 발생하더라도, 관성 모멘트는 $7.534826 \times 10^{-4}N\cdot m$ 부터 $8.491446 \times 10^{-4}N\cdot m$ 까지의 값을 가질 수 있다. 이 정도 범위의 오차는 실험의 오차율을 최대 10%까지 발생시킬 수 있으며, 실제 실험 결과에서 발생하였던 5% 내외의 오차를 설명할 수 있다.

측정 장비의 한계에서 발생하는 오차는 더 정밀한 장비를 사용함으로써 충분히 해결할 수 있다. 사람이 장비를 사용함으로써 발생하는 오차는, 동일한 측정 작업을 여러 번 반복하여 측정값의 평균을 사용함으로써 오차 범위를 줄일 수 있다.

2-3-2. 실과 낙하 추에 의한 오차

본 실험에서 사용한 관성 모멘트 측정 장치는 실의 장력으로 회전 장치에 토크를 발생시킨다. 고로, 실의 장력이 균일하고 온전하게 회전판에 작용하여 $\tau = RT$ 크기의 토크를 일정하게 발생시키는 것은 아주 중요하다.

만일 실이 지면과 평행하게 감기지 않으면, $a = \alpha R$ 가 성립하지 않을 뿐만 아니라, 토크의 크기가 RT 보다 작아진다. 실이 꼬여 있거나 영

켜 있을 경우에는, 실이 풀릴 때 발생하는 힘이 일정하지 않아, 회전판의 토크 τ 의 크기가 진동할 수 있다. 추가 낙하하면서 흔들리는 경우에는, 실이 추를 따라 진동하게 되면서 장력 T 가 불규칙하게 변화한다.

이러한 현상은 측정 장치의 기본 가정에 어긋나며, 뜻하지 않은 오차를 불러 일으킬 수 있다. 실을 최대한 팽팽하고 평행하게 하고, 실의 꼬임에 유의하면서 실을 감으며, 추와 회전판을 최대한 정적인 상태에서 놓는다면, 위와 같은 현상에서 발생하는 오차를 줄일 수 있을 것이다.

3. 결론

본 실험에서는 다양한 모양의 시료의 관성 모멘트를 측정함으로써 중심축 정리와 ‘회전에 관한 뉴턴 제2법칙’ 등, 관성 모멘트와 관련된 여러 이론을 실험적으로 검증하였다. 비슷한 질량의 추라도 그 모양에 따라 관성 모멘트가 달랐으며, 동일한 추라도 회전축에서 떨어진 거리가 멀어질 수록 관성 모멘트도 커짐을 확인하였다.

실험을 통하여 얻은 관성 모멘트 값은 이론적인 값과 정확하게 일치하지는 않았다. 일반적으로 이론 값은 측정 결과보다 다소 작게 계산되었다. 이러한 결과의 원인으로 ‘측정 과정에서 발생한 물리량의 부정확성’, ‘실이나 추에 의하여 발생하는 오차’를 제시하였다. 특히 첫 번째 원인은 실험 결과에서 발생한 오차율 5%를 충분히 설명할 수 있을 정도로 강력하였다. 제시한 오차 원인은 모두 명확한 해결 방안이 있기 때문에, 이를 보정하여 더욱 정확한 실험을 시행할 수 있을 것으로 기대된다.

4. 참고 문헌

[1] Halliday. et al, “일반물리학”, 개정10판,

John Wiley & Sons, Inc. p.319.

[2] 서울대학교 물리학실험 매뉴얼, “실험 1-2. 관성모멘트 측정”. Retrieved 16 April 2020.

[3] Berkeley Seismology Laboratory. University of California. “Data Analysis Toolkit #5: Uncertainty Analysis and Error Propagation”, Kirchner, James. Retrieved 22 April 2016.